Темы **теоретических** вопросов к коллоквиуму  
Математический анализ – 1 семестр

Коллоквиум 1: Предел

1. **Сложение в R**Аксиомы сложения. Леммы о единственности нуля, единственности противоположеного элемента, о решении линейного уравнения.
2. **Умножение в R**Аксиомы умножения. Леммы о единственности единицы, о единственности обратного элемента, о решении линейного уравнения.
3. **Связь сложения и умножения в R**  
   Аксиома связи сложения и умножения. Лемма об умножении на ноль и следствие, лемма о противоположном элементе и следствия.
4. **Порядок в R**  
   Аксиомы порядка, аксиомы связи порядка со сложением и умножением. Лемма о сравнении нуля и единицы (со вспомогательными леммами).
5. **Непрерывность R**  
   Аксиома непрерывности. Леммы о существовании и иррациональности числа, квадрат которого равен 2.
6. **Натуральные числа и математическая индукция**  
   Индуктивные множества, лемма о пересечении индуктивных множеств, множество натуральных чисел. Принцип математической индукции, неравенство Бернулли.
7. **Модуль**  
   Модуль вещественного числа. Теорема о восьми свойствах.
8. **Ограниченность**  
   Границы множества, ограниченность множества. Максимум, минимум, супремум и инфимум множества. Принцип точной грани, следствие для любых непустых множеств. Эквивалентные определения супремума и инфимума.
9. **Принцип Архимеда**  
   Теорема о существовании максимума у любого непустого подмножества N. Следствие о неограниченности N. Принцип Архимеда и следствия из него.
10. **Предел последовательности**  
    Определение предела последовательности через неравенства, эпсилон-окрестности, окрестности, доказательство эквивалентности определений. Утверждение о том, что число не является пределом. Три свойства последовательностей, имеющих предел.
11. **Арифметические свойства пределов последовательностей в R**  
    Определение предела последовательности. Утверждение о том, что число не является пределом. Арифметические свойства пределов в R.
12. **Арифметические свойства пределов последовательностей в расширенном R**  
    Определение предела последовательности, бесконечные пределы. Арифметические свойства пределов в расширенном R (арифм. свойства в R доказывать не нужно).
13. **Предельный переход в неравенствах для последовательностей**  
    Определение предела последовательности, бесконечные пределы. Теорема о влиянии неравенства между пределами на неравенство между последовательностями. Предельный переход в неравенствах.
14. **Сжатая переменная для последовательностей**  
    Определение предела последовательности через неравенства, эпсилон-окрестности, окрестности, доказательство эквивалентности определений. Утверждение о том, что число не является пределом. Теорема о сжатой переменной.
15. **Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности**  
    Определение предела последовательности и монотонных последовательностей. Эквивалентное определение точных граней множеств. Теорема Вейерштрасса, дополнение и обобщение.
16. **Второй замечательный предел для последовательности**  
    Определение предела последовательности через неравенства, эпсилон-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Утверждение о том, что число не является пределом. Второй замечательный предел для последовательности.
17. **Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.**   
    Определения: подпоследовательность, предел последовательности, частичный предел последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса и её дополнение.
18. **Верхний и нижний пределы**Определения: подпоследовательность, предел последовательности, частичный, верхний и нижний предел последовательности. Лемма о верхнем и нижнем пределах последовательности.
19. **Критерий Коши для последовательности**  
    Определение предела последовательности. Утверждение о том, что число не является пределом последовательности. Определение фундаментальной последовательности. Утверждение о том, что последовательность не является фундаментальной. Критерий Коши.
20. **Предел функции**  
    Определения: предельная точка, предел функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности и окрестности (доказательство эквивалентности определений по Коши не требуется), предел функции по Гейне. Эквивалентность определений по Коши и по Гейне.
21. **Локальные свойства функций, имеющих предел**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Определение бесконечных пределов. Теорема о трёх локальных свойствах функций, имеющих предел.
22. **Арифметические свойства пределов функций в расширенном R**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Определение бесконечных пределов. Определение предела функции по Гейне. Теорема об арифметических свойствах пределов в расширенном R.
23. **Предельный переход в неравенствах для функций**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Определение бесконечных пределов. Теорема о влиянии неравенства между пределами функций на неравенство между функциями. Предельный переход в неравенствах.
24. **Теорема о сжатой переменной для функций**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности *(с доказательством эквивалентности определений)*. Определение бесконечных пределов. Определение предела функции по Гейне. Теорема о сжатой переменной.
25. **Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Определение монотонных функций. Эквивалентное определение точных граней множеств.Теорема о пределе монотонной функции.
26. **Критерий Коши для функции**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Фундаментальная последовательность, критерий Коши для последовательностей (без доказательства). Критерий Коши для функции.
27. **Бесконечно малые и бесконечно большие функции**  
    Определение БМ и ББ функций через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности. Лемма о связи БМ и ББ функций. Лемма о трёх свойствах БМ функций. Критерий существования конечного предела в терминах БМ функций.
28. **Первый замечательный предел**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Первый замечательный предел. Следствие о сравнении синуса и его аргумента.
29. **Второй замечательный предел для функции**  
    Определение предела функции по Коши через неравенства, ε-δ-окрестности, окрестности (доказательство эквивалентности определений не требуется). Определение предела функции по Гейне. Второй замечательный предел.
30. **Асимптотическое сравнение функций**  
    Определения для сравнения функций (О-большое, о-малое, эквивалентность). Лемма о сравнении функций в терминах пределов.Определения БМ и ББ функци, сравнение их порядков. Теорема о замене на эквивалентную. Необходимое и достаточное условие замены на эквивалентную.